E1. Egzamin on-line: :Kurs: Matematyka, BDB000121. W2 / Wrocław University of Science and Technology.				A2
Nazwisko		Imię		
Ćwiczenia*		Indeks		

Zadania oceniane są w skali [0 ,5]. Czas na rozwiązanie wszystkich zadań to 90 minut.
Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej stronie A4.

Po rozwiązaniu zadań należy zrobić zdjęcie z rozwiązaniami z każdej kartki (PNG, JPG <=500KB) .
Nazwy plików dla studenta Jan NOWAK, to np.: MAT-E1-A2-NOWAK-ZAD1.PNG

Można umieścić wszystkie zdjęcia w jednym pliku Word i przesłać w opcji E1.
Nazwa pliku Word'a dla studenta Jan NOWAK, to np.: MAT-E1-A2-NOWAK-ZAD1-6.DOCX

Data i godzina wykonania zdjęcia oraz zapisu pliku na dysk lokalny, musi się mieścić w bramce na wykonanie i przesłanie pliku na stronę lub na atj@pwr.edu.pl Czas na zrobienie zdjęć + czas przesłania plików w opcji E1 na stronie kursu to 15 min.

W przypadku zamknięcia się bramki przesłania pliku na stronie kursu w opcji E1, można przesłać pliki w WORD na atj@pwr.edu.pl w czasie 5min po zamknięciu bramki.

Łączny czas na wykonanie zadań + zrobienie zdjęcia + przesłanie plików / pliku w opcji E1 na stronie kursu, to 105min.
Łączny czas na wykonanie zadań + zrobienie zdjęcia + przesłanie pliku WORD na atj@pwr.edu.pl , to 110min.

1	2	3	4	5	6	Suma

1. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie:

$$u_{xx} + 2u_{yx} + u_{yy} = 0.$$

2. Narysować zbiory o stałym typie dla równania:

$$(4 - x^2)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = 0.$$

3. Rozwiązać zagadnienie brzegowe:

$$u_{xy} = 2x\cos(y),\ \ u(x,0) = e^x,\ \ u(0,y) = 1 + \sin(y).$$

4. Narysować w przestrzeni metrycznej X=R^2 hiperpłaszczyznę generowaną przez X1=[1,1], X2=[3,1] czyli zbiór :

$\overline{H}(X_1, X_2) = \{\bar{x} \in X : \varrho(\bar{x}, X_1) = \varrho(\bar{x}, X_2)\}$, gdzie metryka jest postaci:

$$\varrho(\bar{x}, \bar{y}) = max\{\frac{|x_1 - x_2|}{v_1}, \frac{|y_1 - y_2|}{v_2}\}, v_1 = 3,\ v_2 = 2,\ \overline{x} = [x_1, x_2],\ \overline{y} = [y_1, y_2].$$

5. Niech $W_{[-1\ 2]}$ będzie unormowaną przestrzenią wielomianów na odcinku [-1,2] gdzie norma || f || jest postaci:

$\|f\| = \max_{-1 \le x \le 2} |f(x)|$. Czy wielomiany f(x)=x^2-3x+2, g(x)=-x^2 -1, są liniowo niezależne?

6. Niech $W_{[-1\ 2]}$ będzie unormowaną przestrzenią wielomianów na odcinku [-1,2] gdzie norma || f || jest postaci:

$\|f\| = \max_{-1 \le x \le 2} |f(x)|$.

Niech $H = lin\{1, x\}$ będzie podprzestrzenią liniową w X. Obliczyć rzut ortogonalnym f*(x), funkcji $f_0(x) = 13x^2$ na podprzestrzeń H oraz błąd bezwzględny $\|f_0 - f^*\|$.

* wpisujemy nazwisko prowadzącego ćwiczenia

Rozwiązania. Zad.1 Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie: (*)$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

$A(x,y) = 1, B(x,y) = 1, C(x,y) = 1, D(x,y) = 0, E(x,y) = 0, F(x,y) = 0,$

Dziedzina:$D_A = \mathbb{R}^2, D_B = \mathbb{R}^2, D_C = \mathbb{R}^2, D_1 = D_A \cap D_B \cap D_C = \mathbb{R}^2$, Równanie charakterystyczne: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$

$$\Delta = (-2B)^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0 \Rightarrow (*)\ jest\ \ typu\ \ (P) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = x + C \Rightarrow \xi(x,y) = -x + y, \eta(x,y) = x \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (\xi_x)^2 & \xi_x\xi_y & (\xi_y)^2 & 0 & 0 \\ 2\xi_x\eta_x & \xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x & 2\xi_y\eta_y & 0 & 0 \\ (\eta_x)^2 & \eta_x\eta_y & (\eta_y)^2 & 0 & 0 \\ \xi_{xx} & \xi_{xy} & \xi_{yy} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{xx} & \eta_{xy} & \eta_{yy} & \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ 2B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, u_\xi, u_\eta] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_{\eta\eta} = 0.$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania (*) jest postaci:$u(x,y) = F(\xi(x,y)) + \eta(x,y)G(\xi(x,y)) = F(-x+y) + xG(-x+y)$, gdzie (F(.),G(.) są dowolnymi funkcjami klasy C^1.

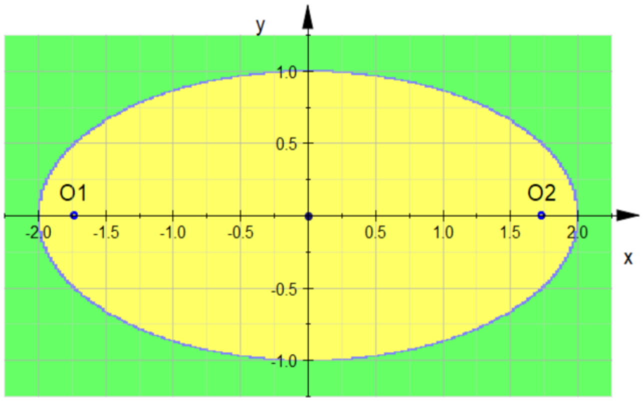
Zad.2 Narysować zbiory o stałym typie dla równania:

$(*)(4 - x^2)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = 0 \Rightarrow A(x,y) = 4 - x^2, B$
$C(x,y) = 1 - y^2, D(x,y) = 0, E(x,y) = 0, F(x,y) = 0$

$\Delta(x,y) = (-2B)^2 - 4AC = (-2xy)^2 - 4(4 - x^2)(1 - y^2)$
$= 4(x^2 + 4y^2 - 4).$

$\Delta(x,y) > 0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 > 4 \Rightarrow (*)\ jest\ \ typu\ (H)\text{-}kolor\ zielony,$
$\Delta(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow (*)\ jest\ typu\ (P)\text{-}kolor\ niebieski,$

$\Delta(x,y) < 0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 < 4 \Rightarrow (*)\ \ jest\ \ typu\ (E)\text{-}kolor\ żółty.$



linia przerywana – asymptoty :

Zad.3 Rozwiązać zagadnienie brzegowe: (*)$u_{xy} = 2x\cos(y), (1)u(x,0) = e^x, (2)u(0,y) = 1 + \sin(y)$.

Rozwiązanie ogólne równania $u_{xy} = 2x\cos(y)$
jest postaci u(x,y)=F(x) + G(y) -x^2 cos(y), gdzie funkcje F(.), G(.) są dowolne klasy C^1

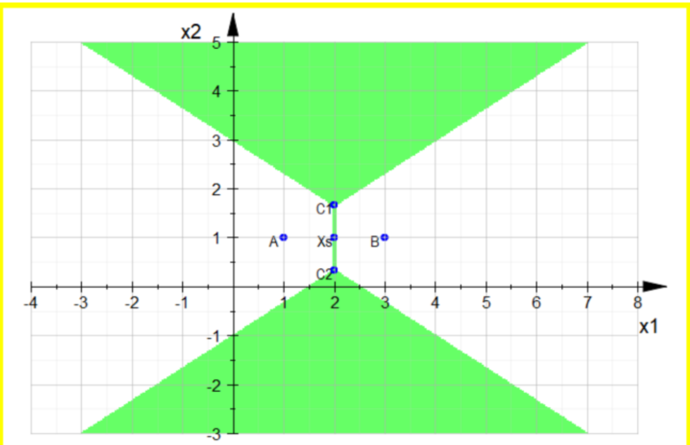
Z warunku (1) jest: F(x) + G(0) =e^x , natomiast z (2) jest: F(0)+G(y)=1+sin(y) a zatem : F(0) +G(0) = 1.

Otrzymujemy więc : u(x,y) =$e^x - G(0) + 1 + \sin(y) - F(0) - x^2\sin(y)$
$czyli\ ostatecznie\ \ u(x,y) = e^x + \sin(y) - x^2\sin(y).$

Sprawdzenie:$u(x,0) = e^x, u(0,y) = 1 + \sin(y).$

Zad. 4

Hiperpłaszczyzna: $\bar{H}(X_1, X_2) = \{\bar{x} \in X : \varrho(\bar{x}, X_1) = \varrho(\bar{x}, X_2)\}$, $\varrho(\bar{x}, \bar{y}) = max\{\frac{|x_1 - x_2|}{v_1}, \frac{|y_1 - y_2|}{v_2}\}, v_1 = 3, v_2 = 2.$



A=X1=[1,1], B=X2=[3,1], Xs=(X1+X2)/2=[2,1], C1=[2, 5/3], C2=[2,1/3]

Zad. 5.

I. Niezależność funkcji z definicji:

$f(x) = x^2 - 3\mathrm{x} + 2, g(x) = -x^2 - 1, f(x), g(x) \in W_{[-1,2]}$

(*) Funkcje f(x) oraz g(x) są liniowo niezależne $\Leftrightarrow \forall_{a,b\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}(af(x) + bg(x) = 0) \Rightarrow (a = 0) \wedge (b = 0)$

Dla dowolnych a, b z kombinacji liniowej : $a(x^2-3x+2)+b(-x^2-1)=0$ wynika, że : a=0 oraz a-b=0 oraz 2a-b=0. Po dodaniu stronami jest

b=0, czyli a=0 oraz b=0. Zatem i z definicji (*) funkcje f(x) oraz g(x) są liniowo niezależne.

II. Niezależność funkcji za pomocą nierówności Schwartza:

$||f|| = \max\limits_{-1\le x\le 2}|f(x)| \Rightarrow (f,g) = \frac{1}{4}\left(||f+g||^2 - ||f-g||^2\right) = \frac{1}{4}(5^2 - 8^2) = \frac{-39}{4} \Rightarrow ||f|| = 6,\ ||g|| = 5 \Rightarrow$

$H(f,g) = \frac{|<f,g>|}{||f||\cdot||g||} = \frac{13}{40} < 1$a zatem funkcje f(x), g(x) są liniowo niezależne.

III. Niezależność funkcji za pomocą macierzy Grama :

$G = \begin{bmatrix} g11 & g12 \\ g21 & g22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & \frac{-39}{4} \\ \frac{-39}{4} & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow det(G) = \frac{12879}{16} \neq 0$**,** czyli f(x) oraz g(x) są liniowo niezależne.

Zad. 6.

$||f|| = \max\limits_{-1\le x\le 2}|f(x)| \Rightarrow (f,g) = \frac{1}{4}(||f+g||^2 - ||f-g||^2) \Rightarrow (f,f) = ||f||^2$

$H = lin\{1,x\}, g_1(x) = 1, g_2(x) = x$ a zatem $f^*(x) = ag_1(x) + bg_2(x).\ f_0(x) = x^2$**.**

Współczynniki a, b spełniają równanie macierzowe: $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, gdzie f_1 = <f_0, g_1>, f_2 = <f_0, g_2>$.

$$g_{11} = (g_1, g_1) = ||g_1||^2 = ||1||^2 = 1,\ \ g_{12} = (g_1, g_2) = \frac{1}{4}(||g_1+g_2||^2 - ||g_1-g_2||^2) = \frac{1}{4}(||1+x||^2 - ||1-x||^2) = \frac{1}{4}((3)^2 - (2)^2) = \frac{5}{4},$$

$$g_{21} = g_{12},\ \ g_{22} = ||g_2||^2 = ||2||^2 = 4,$$

$$f_1 = (f_0, g_1) = \frac{1}{4}(||f_0+g_1||^2 - ||f_0-g_1||^2) = \frac{1}{4}(||13x^2+1||^2 - ||13x^2-1||^2) = \frac{1}{4}((53)^2 - (51)^2) = 52,$$

$$f_2 = (f_0, g_2) = \frac{1}{4}(||f_0+g_2||^2 - ||f_0-g_2||^2) = \frac{1}{4}(||13\mathrm{x}^2+x||^2 - ||13\mathrm{x}^2-x||^2) = \frac{1}{4}((54)^2 - (50)^2) = 104.$$

Stąd: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 104 \end{bmatrix} \Rightarrow det(G) = \frac{39}{16} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 52 \\ 104 \end{bmatrix} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 64 & -20 \\ -20 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 52 \\ 104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 32,$

$$b = 16\ \ czyli\ \ f^*(x) = 16x + 32.$$

Błąd bezwzględny:

$||f_0 - f^*|| = ||13x^2 - 16x - 32|| = \frac{480}{13}$.